

节理非线性问题的约束函数法

李春光, 郑 宏, 葛修润, 王水林

(中国科学院岩土力学重点实验室, 武汉 430071)

摘 要: 接触非线性主要表现在其接触状态的突变而导致的非光滑性, 这种非光滑性可以通过约束函数进行光滑逼近, 进而可以用 Newton 法得到近似解, 此方法称之为约束函数法。岩土工程中常用的 Goodman 单元就是一种类型的接触模型, 但其参数的确定及计算的收敛性都存在着一一定的困难。然而把约束函数应用到常规的 Goodman 单元中则可以解决上述困难, 在详细地给出了其有限元法后, 给出了处理刚体位移的一种简便方法。作为算例, 给出了叠梁和三峡 3[#] 坝段坝基稳定性的计算结果。

关 键 词: 接触问题; 约束函数法; 有限元法; Goodman 单元; 刚体位移

中图分类号: TU 443

文献标识码: A

Constraint function method in nonlinear fault problems

LI Chun-guang, ZHENG Hong, GE Xiu-run, WANG Shui-lin

(Key Laboratory of Rock & Soil Mechanics, Institute of Rock & Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract: The no-smoothness resulting from changes of contact state is the main reason of nonlinearity in contact analysis; but this no-smoothness can be approximated by constraint function; and then Newton method or Newton-like methods can be used to acquire its approximate solution. The conventional Goodman element is the most frequently used model in the numerical simulation of structural planes; but there are some difficulties in parameter determination and computing convergence. By constraint function method, the conventional problems in Goodman element can be solved easily. The detailed format of its finite element method is given; and then a simple method dealing with rigid displacement is also given. Finally, combined beams and dam foundation #3 of the Three Georges Project are computed as examples.

Key words: contact problem; constraint function method; finite element method; Goodman element; rigid displacement

1 引 言

接触问题在岩土工程中应用十分广泛, 如地质中的许多非连续面以及桩土界面等都可以简化成接触问题, 但他比一般的非线性更为困难, 其根本原因是非光滑性而导致的高度非线性。目前岩土工程最常用的结构面单元是 Goodman 单元, 但他的法向刚度和切向刚度的确定比较困难。所以本文首先对 Goodman 单元的接触模型光滑化, 即作为约束函数处理后, 上述问题则不复存在, 且由于其光滑, 使常规的 Newton 解法收敛更加容易, 随后还讨论了接触中的刚体位移问题。

2 接触描述

小变形假定: 不连续面 Γ 上的局部标架 $(n, s)^T$ 在

变形过程中保持不变, 点对 $M^1 - M^2$ 之间的作用力和变形始终都将以这个不变的局部标架 $(n, s)^T$ 作为参照系。划分网格时点对 $M^1 - M^2$ 可以拥有完全相同的坐标, 但可赋予它们一初始的法向间隙 g 。

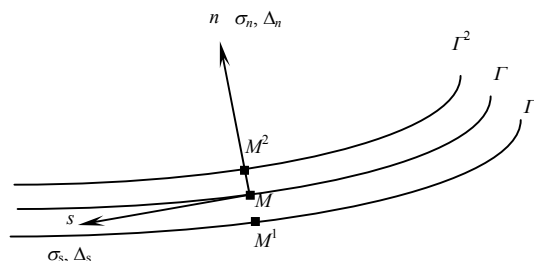


图 1 界面模型

Fig.1 Model of contact surface

符号规定: $\lambda^k = (\lambda_n^k, \lambda_s^k)^T$ 为第 k 个载荷增量步

结束后点对 $M^1 - M^2$ 的接触内力, 可视为下岸点 M^1 所受的接触力; $\Delta^k = (\Delta_n^k, \Delta_s^k)^T$ 为第 k 个载荷增量步结束后点对 $M^1 - M^2$ 之间的相对位移, 其中 n, s 代表法向和切向, 上标 k 为载荷步, 无上标代表增量, 如 $\lambda_n = \lambda_n^k - \lambda_n^{k-1}$ 等。点对 $M^1 - M^2$ 之间的相对位移增量 $= (\Delta_n, \Delta_s)^T$ 定义为

$$\begin{cases} \Delta_n = u_n^2 - u_n^1 + g \\ \Delta_s = u_s^2 - u_s^1 \end{cases} \quad (1)$$

其中 u_n^1, u_s^1 为点 M^1 在 $(n, s)^T$ 中的位移增量, 当 $k=1$ 时, g 为初始法向间隙, 否则 g 为上一载荷增量步的法向位移增量 Δ_n 。

约束条件为

在法向上,

$$\begin{cases} \lambda_n^k \leq 0, \Delta_n \geq 0 \\ \Delta_n \lambda_n^k = 0 \end{cases} \quad (2)$$

在切向上,

$$\begin{cases} |\lambda_s^k| \leq c - f \lambda_n^k, \Delta_s \lambda_s^k \geq 0 \\ \Delta_s (|\lambda_s^k| + f \lambda_n^k - c) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

3 约束函数

3.1 法向约束函数

非连续的式 (2) 可在令下式中的 $\varepsilon_n \rightarrow +0$ 时得以恢复

$$w_n(\bar{\Delta}_n, \lambda_n) \cong \frac{1}{2}(\bar{\Delta}_n - \lambda_n^k) - \left[\frac{1}{4}(\bar{\Delta}_n + \lambda_n^k)^2 + \varepsilon_n \right]^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (4)$$

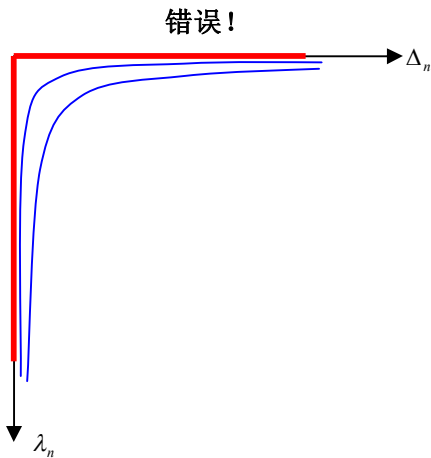


图 2 法向约束条件

Fig.2 Constraint condition in normal direction

3.2 法向约束函数

非连续的式 (3) 也可在令下式中的 $\varepsilon_s \rightarrow +0$ 时得以恢复

$$w_s(\bar{\Delta}_s, \lambda_n, \lambda_s) \cong \pi \lambda_s^k - 2(c - f \lambda_n^k) \tan^{-1} \frac{\bar{\Delta}_s}{\varepsilon_s} = 0 \quad (5)$$

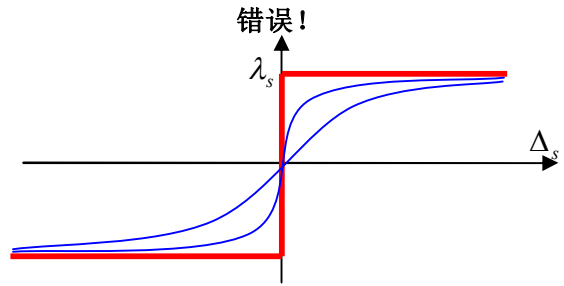


图 3 切向约束条件

Fig.3 Constraint condition in tangential direction

其中, $\bar{\Delta}_n = G_n \Delta_n$, $\bar{\Delta}_s = G_s \Delta_s$, G_n 和 G_s 的量纲与弹性模量和长度的乘积一致。同样 ε_n 也是有其物理意义的。本文并没有考虑接触面滑动后的复杂性, 相关问题可参考文献^[7~9]。

计算中一般可取与弹性模量有相同数量级的 2 个常量。收敛困难时, 可降低它们的量级来提高收敛速度。

4 有限元法

4.1 Goodman 单元插值函数

如图 4 为 Goodman 单元示意图, 其中 θ 为法向 n 与 x 轴之间的夹角。

记:

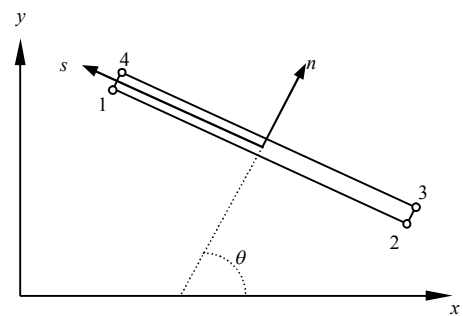


图 4 Goodman 单元

Fig.4 Goodman element

$$C = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\lambda = (\lambda_n, \lambda_s)^T \quad (7)$$

λ 表示下盘(边 1-2)上所受到的作用力。

$$\Delta = (\Delta_n, \Delta_s)^T \quad (8)$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_n \\ \Delta_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_+ \\ v_+ \\ u_- \\ v_- \end{pmatrix} = [I_2 - I_2] \begin{pmatrix} u_+ \\ v_+ \\ u_- \\ v_- \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} u_+ \\ v_+ \\ u_- \\ v_- \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & N_1 \\ N_1 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_2 I_2 & N_1 I_2 \\ N_1 I_2 & N_2 I_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}^e \quad (11)$$

则:

$$\Delta = \mathbf{C} [I_2 - I_2] \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_2 I_2 & N_1 I_2 \\ N_1 I_2 & N_2 I_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N_1 \mathbf{C} & -N_2 \mathbf{C} & N_2 \mathbf{C} & N_1 \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_J \mathbf{u}^e \quad (12)$$

其中

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (13)$$

$$\mathbf{B}_J = [-N_1 \mathbf{C} \quad -N_2 \mathbf{C} \quad N_2 \mathbf{C} \quad N_1 \mathbf{C}]_{2 \times 8} \quad (14)$$

4.2 系统虚功原理

由系统虚功原理得:

$$f_{\text{int}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum \int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \sum \int_{\Gamma^e} \mathbf{B}_J^T \boldsymbol{\lambda} d\Gamma = f_{\text{ext}} \quad (15)$$

则对于节理单元的积分采用 Gauss 积分, 得

$$\int_{\Gamma^e} \mathbf{B}_J^T \boldsymbol{\lambda} d\Gamma = \sum_{i_g=1}^2 w_{i_g} \mathbf{B}_J^T \boldsymbol{\lambda}_{i_g} = \mathbf{K}_{u\lambda}^e \boldsymbol{\lambda}^e \quad (16)$$

$$\mathbf{K}_{u\lambda}^e = [w_1 \mathbf{B}_{J,1}^T w_2 \mathbf{B}_{J,2}^T] \boldsymbol{\lambda}^e, \quad (\boldsymbol{\lambda}^e)^T = [\lambda_1^T \lambda_2^T]^T \quad (17)$$

现在的问题则是求由式(9), 式(4)和式(5)所联立的非线性方程组, 以增量节点位移向量 $\mathbf{u}$ 为基本未知向量, 采用 Newton 法得

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\lambda} \\ \mathbf{K}_{\lambda u} & \mathbf{K}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u^i \\ \mathbf{r}_\lambda^i \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots \\ \mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \delta \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\lambda}^{i+1} = \boldsymbol{\lambda}^i + \delta \boldsymbol{\lambda} \end{cases} \quad (18)$$

其中

$$\mathbf{K}_{uu} = \sum \mathbf{K}_{uu}^e, \quad \mathbf{K}_{u\lambda} = \sum \mathbf{K}_{u\lambda}^e, \quad \mathbf{K}_{\lambda u} = \sum \mathbf{K}_{\lambda u}^e, \quad \mathbf{K}_{\lambda\lambda} = \sum \mathbf{K}_{\lambda\lambda}^e \quad (19)$$

$$\mathbf{K}_{\lambda u}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_n}{\partial \Delta_n} \frac{\partial \Delta_n}{\partial u} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w_s}{\partial \Delta_s} \frac{\partial \Delta_s}{\partial u} \end{bmatrix} = \quad (20)$$

$$\mathbf{J}_J \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta_n}{\partial u} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Delta_s}{\partial u} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_{\lambda\lambda}^e = \mathbf{J}_J \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_n}{\partial \lambda_n} & 0 \\ \frac{\partial w_s}{\partial \lambda_n} & \frac{\partial w_s}{\partial \lambda_s} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\frac{\partial w_n}{\partial \bar{\Delta}_n} = \frac{\lambda_n^k + w_n}{2w_n - (\bar{\Delta}_n - \lambda_n^k)} \quad (23)$$

$$\frac{\partial w_n}{\partial \lambda_n} = \frac{\bar{\Delta}_n - w_n}{2w_n - (\bar{\Delta}_n - \lambda_n^k)} \quad (24)$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial \bar{\Delta}_s} = -\frac{2\varepsilon_s (c - f\lambda_n^k)}{\bar{\Delta}_s^2 + \varepsilon_s^2} \quad (25)$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial \lambda_n} = 2f \tan^{-1} \frac{\bar{\Delta}_s}{\varepsilon_s} \frac{\partial w_s}{\partial \lambda_s} = \pi \quad (26)$$

实际上, 接触面都是粗糙不平的, 且有一定的分形特征, 故实际上的 ε_n 是大于 0 的^[2], 且有实际物理意义, $\varepsilon_n \rightarrow +0$ 是接触问题的理想化。

4.3 耦合的解除

如果取节理单元 Γ^e 内的 Gauss 点的接触内力为基本未知量, 对 Γ^e 内的 Gauss 点, 就有(省略了 Gauss 点下标)

$$\begin{cases} \frac{\partial w_n}{\partial \Delta_n} \delta \Delta_n + \frac{\partial w_n}{\partial \lambda_n} \delta \lambda_n = -w_n \\ \frac{\partial w_s}{\partial \Delta_s} \delta \Delta_s + \frac{\partial w_s}{\partial \lambda_n} \delta \lambda_n + \frac{\partial w_s}{\partial \lambda_s} \delta \lambda_s = -w_s \end{cases} \quad (27)$$

由式(22)~(25)可从上式中求得

$$\delta \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{A} \delta \Delta - \mathbf{h} \quad (28)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & 0 \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\Delta_{11} = -\frac{\frac{\partial w_n}{\partial \Delta_n}}{\frac{\partial w_n}{\partial \lambda_n}}, \quad \Delta_{21} = \frac{\frac{\partial w_n}{\partial \Delta_n} \frac{\partial w_s}{\partial \lambda_n}}{\frac{\partial w_n}{\partial \lambda_n} \frac{\partial w_s}{\partial \lambda_s}}, \quad \Delta_{22} = -\frac{\frac{\partial w_s}{\partial \Delta_s}}{\frac{\partial w_s}{\partial \lambda_s}} \quad (29)$$

$$\mathbf{h} = (h_n, h_s)^T \quad (30)$$

$$h_n = \frac{w_n}{\frac{\partial w_n}{\partial \lambda_n}}, \quad h_s = \frac{w_s \frac{\partial w_n}{\partial \lambda_n} - w_n \frac{\partial w_s}{\partial \lambda_n}}{\frac{\partial w_n}{\partial \lambda_n} \frac{\partial w_s}{\partial \lambda_s}} \quad (31)$$

所以

$$\delta \lambda^e = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{A}_1 \\ \delta \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_{J,1} \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_{J,2} \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}^e - \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

在方程组(18)的第一式中含有节理单元 Γ^e 有如下的贡献 $\mathbf{K}_{u\lambda}^e \delta \lambda^e$, 将式(14)和(25)代入该式, 得

$$\mathbf{K}_{u\lambda}^e \delta \lambda^e = \left[\mathbf{w}_1 \mathbf{B}_{J,1}^T \mathbf{w}_2 \mathbf{B}_{J,2}^T \right] \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_{J,1} \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_{J,2} \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}^e - \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \right) = \mathbf{K}_{J,uu}^e \delta \mathbf{u}^e - \mathbf{r}_J^e \quad (33)$$

式中:

$$\mathbf{K}_{J,uu}^e = \sum_{i=1}^2 \mathbf{w}_i \mathbf{B}_{J,i}^T \mathbf{A}_i \mathbf{B}_{J,i}, \quad \mathbf{r}_J^e = \sum_{i=1}^2 \mathbf{w}_i \mathbf{B}_{J,i}^T \mathbf{h}_i \quad (34)$$

可分别将 $\mathbf{K}_{J,uu}^e$ 和 $\mathbf{r}_J^e$ 视为节理单元 Γ^e 的单刚和等效节点力列阵而分别组集到总刚和总体载荷列阵中去。

可见正是 $\mathbf{A}_i$ 的非对称导致了 $\mathbf{K}_{J,uu}^e$ 的非对称。

4.4 算法

给定初始向量 $\mathbf{u}^0$ 和 λ^0 ; 对于 $i = 0, 1, \dots$

(1) 按照通常的办法形成总刚

$$\mathbf{K}_{ep}^i = \sum \mathbf{K}_{ep}^{e,i} + \sum \mathbf{K}_{J,uu}^{e,i}$$

和非平衡力向量

$$\mathbf{r}^i = \sum \mathbf{r}_u^i + \sum \mathbf{r}_J^i$$

(2) 解方程组

$$\mathbf{K}_{ep}^i \delta \mathbf{u} = \mathbf{r}^i$$

(3) 由式(32)解得各节理单元的接触内力修正量

(4) 更新位移向量和接触力向量

$$\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \delta \mathbf{u}, \quad \lambda^{i+1} = \lambda^i + \delta \lambda$$

(5) 如果 $\|\mathbf{r}^i\| \leq \varepsilon \|\mathbf{r}^0\|$, 跳出循环; 否则置 $i = i + 1$, 返回(1)

5 刚体位移的一种简便处理方法

当系统约束不足时, 系统可能成为瞬变体系, 这样就会导致结构在欠约束的方向产生极大的位移, 即系统崩溃。文[14]给出了两种解决方案: 柔性支撑法和自由度混编法。下面针对约束函数法进行分析其 Jacobi 矩阵奇异的原因, 然后给出针对该方法的一种更为简单的方法。

一般的迭代是从 $\mathbf{u} = 0$ 和 $\lambda_n = 0$ 开始, 因 $w_n \neq 0$, 故初始的

$$\frac{\partial w_n}{\partial \Delta_n} \neq 0 \quad (35)$$

如果摩擦系数 $c = 0$, 从而初始的

$$\frac{\partial w_s}{\partial \Delta_s} = 0 \quad (36)$$

这正是导致 Jacobi 矩阵奇异的根本原因。

如果摩擦系数 $c > 0$, 则

$$\frac{\partial w_s}{\partial \Delta_s} \neq 0 \quad (37)$$

此时 Jacobi 矩阵非奇异。

故如果可以使 $c = c_0 + c_1 > 0$, c_0 为一小量。

实际上 c_0 对结果的影响极小, 如想进一步减小 c_0 的影响, 可在迭代过程中逐渐使 $c_0 \rightarrow 0$ 。因为, 在迭代过程中, 约束函数会导致 $\lambda_n \neq 0$, 此时 c_0 在 $c - f\lambda_n$ 中的比例已经很小了。

6 算例

6.1 叠梁问题

图5为两悬臂梁相叠而成的结构, 每根梁的尺寸都是 $10 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$, 弹性模量 $E = 1.5 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.25$, 两梁之间无摩擦。在端点 A 分别向下(情况1)和向上(情况2)作用一集中力 $P = 1.5 \text{ kN}$ 。图6和图7分别是两种情况的变形图。

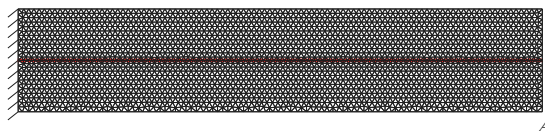


图5 叠梁问题单元划分

Fig.5 Mesh of combined beams

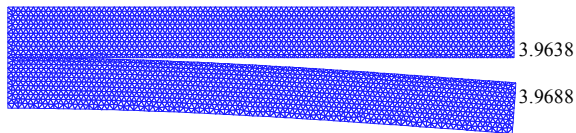


图6 情况1的变形图(单位: mm)
Fig.6 Deformations of Case1(unit: mm)

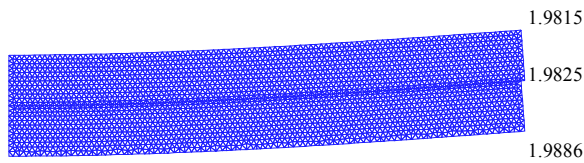


图7 情况2的变形图(单位: mm)
Fig.7 Deformations of Case2(unit: mm)

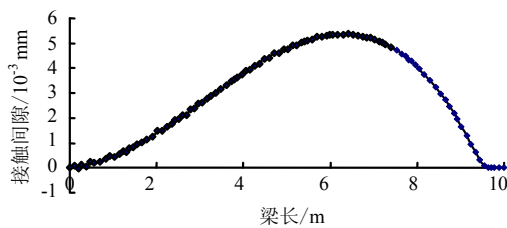


图8 情况2的法向接触间隙沿纵向分布(单位: mm)
Fig.8 Contact gap of two beams(unit: mm)

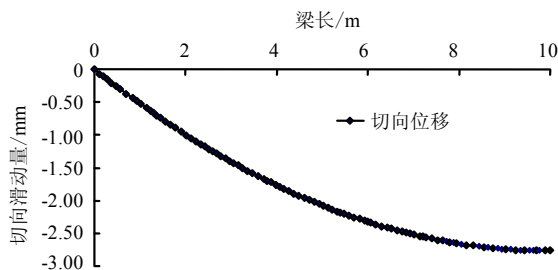


图9 情况2的滑移量沿纵向分布(单位: mm)
Fig.9 Slipping displacements of case2(unit: mm)

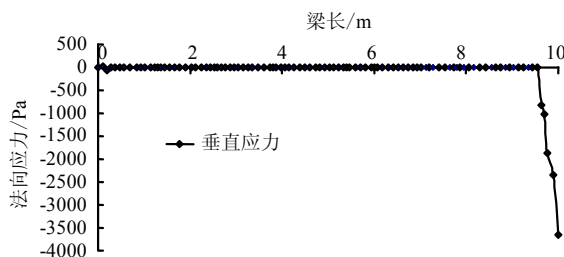


图10 情况2的法向应力沿纵向分布(单位: Pa)
Fig.10 Normal stresses of case2(unit: Pa)

由于文献[1]中用的为 NQ6 非协调元, 而本文用的是协调元, 为了与之对比, 故采用较为密集的单位。

图6及图7分别是情况1及情况2的变形图, 图中的右侧数据为梁变形后角点的位移值; 图8是接触间隙沿长度方向的分布, 计算表明, 只有在9.6~10 m之间才有接触, 其余部分都是无接触部分, 其中最大的接触间隙是 5.75×10^{-3} mm, 位于距左边界约束端约6.4 m左右的地方, 两梁之间的作用

力大小约为0.766 kN, 约为 p 的一半。

6.2 三峡左岸3#坝段

三峡工程由大坝、水电站厂房、通航建筑物等主要建筑物组成。左岸1#~5#坝段的基岩为断续缓倾角结构面相对发育区, 长大缓倾角裂隙与岩桥在各坝段呈交互分布, 3#坝段典型的地质剖面图如图11。厂房邻近基岩为近70 m高的基岩边坡, 由于大量断续缓倾角结构面的存在, 1#~5#坝段坝基稳定关系到长江三峡工程的成败, 其深层抗稳定问题是三峡工程最重大的工程技术问题之一。

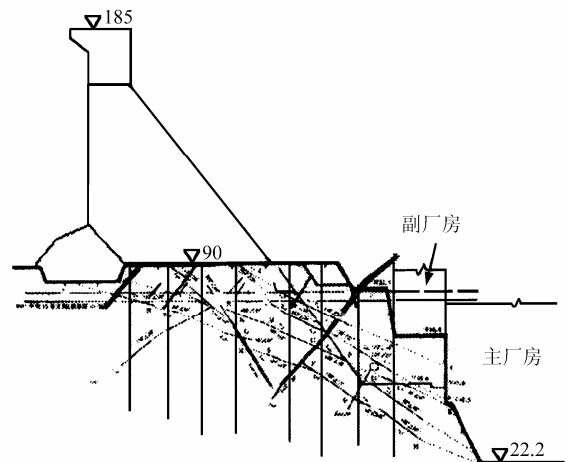


图11 3#坝段地质剖面图(单位: m)
Fig.11 Geological profile of dam foundation (unit: m) #3

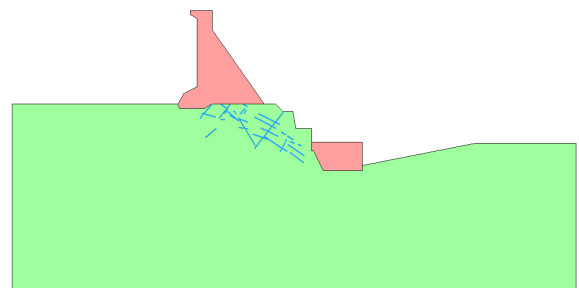


图12 3#坝段几何模型
Fig.12 Geometric model of dam foundation #3

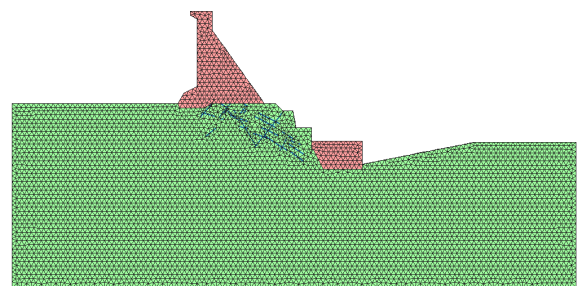


图13 单元划分(节点数: 5078, 三角形单元数: 9 622, Goodman单元数: 108)
Fig.13 Mesh of dam foundation #3

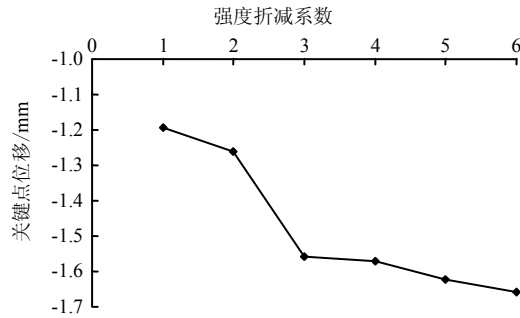


图 14 坝顶上游最高点水平位移随着强度折减系数的变化图 (单位: mm, 位移为包括自重在内产生的总位移)

Fig.14 Horizontal displacements of the highest point on the dam with strength reduction factor(unit: mm)

图 14 是坝顶关键点的水平位移随强度折减系数的变化图, 可以看出: 结构面强度折减系数 2~3 时, 结构面两侧则会发生较大错动, 导致坝体发生较大位移, 因岩体强度比结构面强度高, 故结构面强度对整个结构其控制作用; 结构面强度折减系数为 3 时为一关键点。当强度折减系数>3 后, 结构面的强度发挥殆尽, 以后曲线呈线性关系, 坝体变形主要是岩体的弹性变形所致。

7 结 论

约束函数法是处理接触问题的一种比较好的方法, 它与 Goodman 单元结合, 可以很好地解决 Goodman 单元的刚度参数难以确定及一般的“试验—误差”接触算法的收敛性问题, 它可以方便地模拟岩土工程中常见的结构面。

由于接触问题导致的过于强烈的非线性, 有时计算效率并不太高, 若提高其计算效率, 相关的高效稳定的非线性算法还有待于进一步研究。

参 考 文 献

- [1] 郑宏. 岩土力学中的几类非线性问题[博士论文 D]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 2000.
- [2] Oden J T, Pires E B. Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity[J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1983, 50: 67—76.
- [3] Oden J T, Pires E B. Numerical analysis of certain contact problems in elasticity with non-classical friction laws[J]. **Computers & Structures**, 1983, 16(1-4): 481—485.
- [4] Ted Belytschko, Wing Kam Liu, Brian Moran 著, 庄拙译. 连续体和结构的非线性有限元[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- [5] Bathe K J, Bouzinov P A. On the constraint function method for contact problems[J]. **Computers & Structures**, 1997, 64(5/6): 1 069—1 085.
- [6] 殷有泉. 固体力学非线性有限元引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 清华大学出版社, 1987.
- [7] 葛修润. 岩体中节理面、软弱夹层等的力学性质和模拟分析方法 (1) [J]. 岩土力学, 1979, 1(1): 54—75.
GE Xiu-run. The mechanical behaviors and analog analytical method of joint and weak intercalations in rock mass[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 1979, 1(1): 54—75.
- [8] 葛修润. 岩体中节理面、软弱夹层等的力学性质和模拟分析方法 (2) [J]. 岩土力学, 1979, 1(2): 57—72.
GE Xiu-run. The mechanical behaviors and analog analytical method of joint and weak intercalations in rock mass (Continued)[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 1979, 1(2): 57—72.
- [9] 陈颢, 黄庭芳. 岩石物理学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.
- [10] Tod A. Laursen. Computational contact and impact mechanics—fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis[M]. Germany: Springer Verlag, 2002.